# Über unendliche Reihen von Punktmengen bei Minkowskischer Addition und Subtraktion

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ingrid Ahrens

aus Berlin

1970

# Über unendliche Reihen von Punktmengen bei Minkowskischer Addition und Subtraktion

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Ingrid Ahrens

aus Berlin

1. Referent: Prof. Dr. H . Orsinger

2. Referent: Prof. Dr. A . Dinghas

Tag der mündlichen Prüfung: 2.6.1970

Tag der Promotion:

Inhalt

Einleitung .....1

I. Kompakte Mengen, konvexe Körper

1. Bezeichnungen, Minkowskische Addition .....3
2. Die Hausdorff-Metrik .....6
3. Sätze über konvergente Folgen .....7

II. Minkowskische Reihen

4. Grundlegende Eigenschaften der M-Reihe .....10
5. Hinreichende Konvergenzkriterien .....13
6. Zwei Konvergenzkriterien für Mengenfunktionen .....15

III. Verallgemeinerte Minkowskische Reihen

7. Einiges über die Minkowskische Differenz .....19
8. Eine umfassendere Definition der M-Reihe .....20
9. Zwei Sätze über verallgemeinerte M-Reihen .....21

IV. Limitierungsverfahren

10. Das Cesåro-Verfahren .....23
11. Das Hölder-Verfahren .....27
12. Das Abel-Verfahren .....28

Literatur .....31

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546510_0079

## Einleitung

Eine der wichtigsten Mengenoperationen in der Theorie der konvexen Körper und bei isoperimetrischen Fragen ist die Minkowskische Addition. Von dieser Operation ausgehend, gelang A.Dinghas [1] unter anderem die Übertragung des Riemannschen Integralbegriffs auf Mengenfunktionen ("Riemann-Minkowskisches Integral"). Der Begriff der unendlichen Reihe wurde anscheinend bisher nicht auf Punktmengen bei Minkowskischer Addition übertragen, obwohl dies eigentlich nahe liegt. Damit beschäftigt sich nun diese Arbeit.

Nachdem ich im ersten Abschnitt grundlegende Begriffe und Sätze über konvergente Mengenfolgen bezüglich der Hausdorff-Metrik bespreche, beweise ich im zweiten Abschnitt einige Konvergenzkriterien für "Minkowskische Reihen" von kompakten, nicht leeren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Die Summe einer solchen Minkowskischen Reihe wird mit Hilfe der Hausdorff-Metrik wie bei Reihen mit reellen Summanden erklärt. Es zeigt sich, daß viele von der reellen Analysis her bekannte Sätze in ähnlicher Form auch hier gelten. Dabei tritt an die Stelle der Relation $a \leq b$ häufig nur die Mengenrelation $A \subseteq B$ .

Im dritten Abschnitt beweise ich zunächst einige Sätze über die (von H.Hadwiger [2] eingeführte) Minkowskische Subtraktion, und anschließend erweitere ich den Begriff der Minkowskischen Reihe auf diese Operation. Es zeigt sich unter anderem, daß ein Konvergenzkriterium gilt, das dem Leibnizschen Kriterium für alternierende Reihen entspricht.

Im vierten Abschnitt versuche ich die Limitierungsverfahren von Cesàro, Hölder und Abel auf Minkowskische Reihen zu übertragen. Wie in den vorhergehenden Abschnitten bestehen viele Analogien. Allerdings werden einige Einschränkungen der zugelassenen Summanden notwendig. Wahrscheinlich lassen sich außer diesen drei Verfahren auch noch weitere Limitierungsverfahren in ähnlicher Weise auf Minkowskische Reihen übertragen.

## I. Kompakte Mengen, konvexe Körper

1. Bezeichnungen, Minkowskische Addition. In dieser Arbeit soll bedeuten:

I. $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen,

II. $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen,

III. $\mathbb{R}^+$ die Menge aller nicht negativen reellen Zahlen,

IV. $[a,b]$ das abgeschlossene, $]a,b[$ das offene und $]a,b]$, $[a,b[$ die entsprechenden halboffenen Intervalle mit den Endpunkten a und b,

V. $\mathbb{R}^n$ den n-dimensionalen euklidischen Raum,

VI. $|x - y|$ die euklidische Entfernung im $\mathbb{R}^n$, die für $x = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ und $y = (\eta_1,\ldots,\eta_n)$ durch

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2} \qquad (|x-y| \geq 0)$$

definiert ist,

VII. $S(\varrho,m) = \{x : |x-m| \leq \varrho \ , \ x \in \mathbb{R}^n\}$ die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt m und dem Radius $\varrho$,

VIII. $A, A_i, B, B_i, \ldots$ nicht leere, kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,

IX. $\mathfrak{H}$ die Menge aller nicht leeren, kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,

X. $\mathfrak{K}$ die Menge aller konvexen Körper, d.h. aller konvexen, nicht leeren, kompakten Teilmengen, des $\mathbb{R}^n$,

XI. E(A,u) die Stützebene von A in der Richtung u (Minkowski [1], S.136 ff.; Hadwiger [3], S.138),

XII. $H(A,u)$ den Stützhalbraum von A in der Richtung u (Hadwiger [3], S.137; dort mit $H(A,-u)$ bezeichnet),

XIII. $\lambda M$ (für nicht leeres $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , $\lambda \in \mathbb{R}^+$) die durch

$$\lambda M = \{ y : y = \lambda x \ , \ x \in M \}$$

definierte Menge[1],

XIV. $[A]$ die konvexe Hülle von A, die durch

$$[A] = \bigcap_{u} H(A,u) = \bigcap_{A \subseteq K \in \mathfrak{K}} K \tag{1.1}$$

definiert ist. Offenbar ist $[A]$ ein konvexer Körper $\supseteq A$, und es gilt:

$$A \in \mathfrak{K} \iff [A] = A \tag{1.1'}$$

(vgl. Bonnesen,Fenchel [1], S.5).

Definition 1: Die Minkowskische Summe (M-Summe) von k nicht leeren Teilmengen $M_1,\ldots,M_k$ des $\mathbb{R}^n$ ist erklärt durch

$$M_1 + \ldots + M_k = \sum_{i=1}^{k} M_i := \{ x : x = x_1 + \ldots + x_k \ , \ x_i \in M_i \} \ .$$

Für die Minkowskische Addition gilt (Hadwiger [3], S.199f.):

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = M_2 + M_1 \ , \ (M_1+M_2)+M_3 = M_1+(M_2+M_3), \\ M_1, M_2 \in \mathfrak{R} \implies M_1 + M_2 \in \mathfrak{R} \ , \\ M_1, M_2 \in \mathfrak{K} \implies M_1 + M_2 \in \mathfrak{K} \ . \end{cases} \tag{1.2}$$

Hilfssatz 1: Es gilt

$$[A_1 + A_2] = [A_1] + [A_2] \tag{1.3}$$

sowie

$$[\lambda A] = \lambda [A] \ . \tag{1.3'}$$

---

1) Ist $\lambda \neq 0$, so schreibe ich statt $\frac{1}{\lambda} M$ gelegentlich auch $\frac{M}{\lambda}$ .

Beweis: Der Stützabstand $p(A,u)$ gibt den (mit einem Vorzeichen versehenen) Abstand der Stützebene $E(A,u)$ vom Nullpunkt an; für ihn gilt (Hadwiger [3], S.145):

a) $p(A_1+A_2,u) = p(A_1,u) + p(A_2,u)$,

b) $p(\lambda A,u) = \lambda p(A,u)$.

Offenbar ist $H(A,u) = H([A],u)$; aus a) ergibt sich daher

$$H(A_1+A_2,u) = H(A_1,u) + H(A_2,u)$$
$$= H([A_1],u) + H([A_2],u) = H([A_1]+[A_2],u),$$

und nach (1.1), (1.2) und (1.1') folgt

$$[A_1+A_2] = \bigcap_u H(A_1+A_2,u) = \bigcap_u H([A_1]+[A_2],u)$$
$$= \left[[A_1]+[A_2]\right] = [A_1] + [A_2].$$

Aus b) ergibt sich $H(\lambda A,u) = \lambda H(A,u)$. Durch Mengenvergleich erhält man $\bigcap_u \lambda H(A,u) = \lambda \bigcap_u H(A,u)$ und damit

$$[\lambda A] = \bigcap_u H(\lambda A,u) = \lambda \bigcap_u H(A,u) = \lambda [A].$$

Hilfssatz 2: Für $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^+$ gilt

(1.4) $$\lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2$$

sowie

(1.5) $$(\lambda+\mu)A \subseteq \lambda A + \mu A.$$

Gleichheit besteht in (1.5) für $\lambda, \mu \neq 0$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{K}$ ist.

Beweis: Zu (1.4) und (1.5) vergleiche man etwa Hadwiger [3], S.14. Dort ist auch gezeigt:

$$A \in \mathcal{K} \Rightarrow (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A .$$

Es bleibt noch die Umkehrung zu beweisen. Vorausgesetzt werde also $(\lambda+\mu) A = \lambda A + \mu A$, und angenommen werde, es sei $A \notin \mathcal{K}$ .

Weil A abgeschlossen ist, gibt es dann zwei Punkte $x,y \in A$ mit

(1.6) $\qquad z(\tau) := (1-\tau)x + \tau y \notin A \quad$ für alle $\tau \in ]0,1[$.

Nach Voraussetzung existiert zu $z' := \lambda x + \mu y \in \lambda A + \mu A$ ein $\bar{z} \in A$ mit $z' = (\lambda+\mu)\bar{z}$, also $\bar{z} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}y$. Nach (1.6) folgt $\bar{z} \notin A$ und damit ein Widerspruch.

## 2. Die Hausdorff-Metrik.

**Definition 2:** Für $\varrho \geq 0$ heißt die Menge

$$A^{\varrho} = \bigcup_{m \in A} S(\varrho, m)$$

die äußere und die Menge

$$A^{-\varrho} = \{ m : S(\varrho, m) \subseteq A \}$$

die innere Parallelmenge von A im Abstand $\varrho$.

Ist $\varrho, \sigma \geq 0$, so gilt nach Hadwiger [3], S.147 f.:

(2.1) $\qquad A^{\varrho} = A + S(\varrho, 0)$,

(2.2) $\qquad (A^{\varrho})^{\sigma} = A^{\varrho+\sigma}$ , $\quad (A^{-\varrho})^{-\sigma} = A^{-\varrho-\sigma}$ ,

(2.3) $\qquad (A^{-\sigma})^{\varrho} \subseteq A^{-\sigma+\varrho} \subseteq (A^{\varrho})^{-\sigma}$.

**Satz 1:** Durch

(2.4) $\qquad |A_1, A_2| = \inf \{ \varrho : A_1 \subseteq A_2^{\varrho} \, , \, A_2 \subseteq A_1^{\varrho} \, , \, \varrho \in \mathbb{R}^+ \}$

ist in $\mathfrak{K}$ eine Metrik erklärt ("Hausdorff-Metrik").

Diese Metrik wurde von Hausdorff [1], S.293 f. eingeführt; vgl. auch Hadwiger [3], S.151.

Satz 2: Für $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, $A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$ und $B = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_k B_k$ gilt

$$(2.5) \qquad |A,B| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |A_i,B_i| .$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man bei Dinghas [1]; [2], S.76 f.

Mit Hilfe der Hausdorff-Metrik kann man für $\mathfrak{M}$ den Begriff der Cauchy-Folge und der konvergenten Folge in üblicher Weise definieren (vgl.u.a. Hadwiger [3], S.152 f.):

Definition 3: Eine Folge $(A_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ heißt eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0(\varepsilon)$ gibt mit

$$|A_i,A_k| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } i,k \geq i_0(\varepsilon).$$

Eine Folge $(A_i)$ heißt konvergent gegen A (in Zeichen: $\lim_{i\to\infty} A_i = A$), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0(\varepsilon)$ gibt mit

$$|A_i,A| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } i \geq i_0(\varepsilon).$$

Jede konvergente Folge ist bekanntlich eine Cauchy-Folge.

## 3. Sätze über konvergente Folgen.

Satz 3: Aus $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ und $\lim_{i\to\infty} B_i = B$ folgt

$$\lim_{i\to\infty} (A_i+B_i) = \lim_{i\to\infty} A_i + \lim_{i\to\infty} B_i = A + B.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich sofort aus (2.5); vgl. auch Hadwiger [3], S.153 f.

Satz 4: Gilt $\lim_{i\to a} A_i = A$ sowie $A_i \subseteq B$ (bzw. $A_i \supseteq B$) für alle i, so folgt $A \subseteq B$ (bzw. $A \supseteq B$).

Beweis: Es gelte $A_i \subseteq B$, aber $A \not\subseteq B$; dann gibt es ein $a \in A$ mit $a \notin B$, und wegen $B \in \mathfrak{M}$ ergibt sich $0 < d := \min_{b\in B} |a-b| \leq \min_{a_i\in A_i} |a-a_i|$. Für $0 < \varepsilon < d$ folgt dann $A \not\subseteq A_i^{\varepsilon}$ für alle i, d.h. $\lim_{i\to\infty} A_i \neq A$.

Es gelte $A_i \supseteq B$, aber $A \not\supseteq B$; dann gibt es ein $b \in B$ mit $b \notin A$, und wegen $A \in \mathfrak{M}$ ergibt sich $0 < d' := \min_{a \in A} |a-b|$. Für $0 < \varepsilon < d'$ folgt dann $B \not\subseteq A^{\varepsilon}$ im Widerspruch zu $B \subseteq A_i \subseteq A^{\varepsilon}$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$.

Definition 4: Sind alle Mengen einer Folge $(A_i)$ in einer festen Kugel $S(\xi, 0)$ enthalten, so heißt $(A_i)$ (gleichmäßig) beschränkt.

Definition 5: Eine Folge $(M_i)$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, deren Glieder die Relation $M_i \subseteq M_{i+1}$ für alle i erfüllen, heißt steigend; gilt $M_i \supseteq M_{i+1}$ für alle i, so heißt sie fallend.

Satz 5: Eine konvergente Folge $(A_i)$ ist notwendig gleichmäßig beschränkt. Bei einer steigenden Folge ist diese Bedingung auch hinreichend für die Konvergenz, und es gilt

$$\lim_{i \to \infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$$

($\overline{M}$ bedeute die abgeschlossene Hülle von M).

Beweis: Aus $\lim_{i \to \infty} A_i = A$ folgt $A_i \subseteq A^{\varepsilon}$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$ und daher $A_i \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_{i_0-1} \cup A^{\varepsilon}$ für alle i, d.h. $(A_i)$ ist gleichmäßig beschränkt.

Die Folge $(A_i)$ sei nun gleichmäßig beschränkt und steigend. Offensichtlich ist $A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq (\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i})^{\varepsilon}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$. Es bleibt zu zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $i_0(\varepsilon)$, so daß $A := \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \subseteq A_i^{\varepsilon}$ für alle $i \geq i_0(\varepsilon)$ gilt. Der $\mathbb{R}^n$ werde in n-dimensionale Würfel der Kantenlänge $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$ ($\varepsilon > 0$) zerlegt. Weil die $A_i$ gleichmäßig beschränkt sind, gibt es nur endlich viele Würfel $W_1, \ldots, W_r$ mit $W_k \cap A \neq \emptyset$ ($k = 1, \ldots, r$). Jedem dieser Würfel $W_k$ werde ein Repräsentant $w_k \in A \cap W_k$ zugeordnet; dann gibt es eine Punktfolge $(a_i(k))_{i \in \mathbb{N}}$ aus $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $\lim_{i \to \infty} a_i(k) = w_k$, so daß

(3.1) $\quad |a_i(k)-w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad$ für alle $i \geq i_1(\frac{\varepsilon}{2},k)$

gilt. Jedes $a \in A$ liegt nun in einem Würfel $W_k$ ($k \in \{1,\dots,r\}$), und es ist

(3.2) $\quad |a - w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man aus (3.1) und (3.2)

$$|a-a_{i_1}(k)| \leq |a-w_k| + |w_k-a_{i_1}(k)| \leq \varepsilon ,$$

und wegen $A_i \subseteq A_{i+1}$ gilt auch $a_{i_1}(k) \in A_i$ für alle $i \geq i_1(\frac{\varepsilon}{2},k)$ und damit $A \subseteq A_i^{\varepsilon}$ für alle $i \geq i_0 := \max_{1 \leq k \leq r} i_1(\frac{\varepsilon}{2},k)$.

Satz 6: Für eine fallende Folge $(A_i)$ gilt $\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Dieser Satz ist bei Hadwiger [1]; [3], S.152 f. bewiesen.

Satz 7: Aus $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ folgt $\lim_{i\to\infty} [A_i] = [A]$.

Beweis: Nach (2.1), (1.3) und (1.1') ergibt sich aus $A_i \subseteq A^{\varepsilon}$ sofort $[A_i] \subseteq [A^{\varepsilon}] = [A+S(\varepsilon,0)] = [A] + S(\varepsilon,0) = [A]^{\varepsilon}$ und aus $A \subseteq A_i^{\varepsilon}$ analog $[A] \subseteq [A_i]^{\varepsilon}$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$.

Bemerkung: Aus $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ und $A_i \in \mathfrak{K}$ für alle $i$ folgt nach Satz 7 und (1.1')

$$A = \lim_{i\to\infty} A_i = \lim_{i\to\infty} [A_i] = [A],$$

also $A \in \mathfrak{K}$, d.h. $\mathfrak{K}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{A}$; vgl. auch Hadwiger [3], S.200 f.

Satz 8: Die metrischen Räume $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}$ sind vollständig.

Dieser Satz ist für $\mathfrak{A}$ bei Hadwiger [1]; [3], S.153 bewiesen; daraus ergibt sich für $\mathfrak{K}$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{A}$ die Vollständigkeit.

## II. Minkowskische Reihen

### 4. Grundlegende Eigenschaften der M-Reihe.

**Definition 6:** Gegeben sei eine Folge $(A_i)$, der durch $S_k = \sum_{i=1}^{k} A_i$ eine zweite Folge $(S_k)$ zugeordnet werde. (Nach (1.2) sind die $S_k$ wieder Elemente aus $\mathcal{K}$.) Dann heiße das Folgenpaar $(A_i),(S_k)$ (auch einfach durch $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ bezeichnet) eine **Minkowskische Reihe** oder **M-Reihe**. Eine M-Reihe heiße **konvergent mit der Summe** S (in Zeichen $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S$), wenn die Folge der "Partialsummen" $S_k$ gegen S konvergiert.

Die $A_i$ brauchen nicht von 1 an indiziert zu sein: wie üblich bedeute $\sum_{i=r}^{\infty} A_i$ dasselbe wie $\sum_{i=1}^{\infty} A_{i+r-1}$. Die Konvergenz einer M-Reihe wurde hier auf die der Folge ihrer Partialsummen zurückgeführt. Man kann aber, im Gegensatz zu Zahlenfolgen, die Glieder einer Folge $(A_i)$ nicht immer als Folge der Partialsummen einer M-Reihe auffassen. Die Gleichung $A + X = B$ ist nämlich nicht immer lösbar; Beispiel: $A = \{0,a\}$, $B = \{a\}$ $(a \neq 0)$. Schließlich sei erwähnt, daß reelle Zahlenreihen speziellen M-Reihen im $\mathbb{R}^1$ entsprechen.

Nach Satz 8 konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ genau dann, wenn die $S_k$ eine Cauchy-Folge bilden.

**Satz 9:** $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_o(\varepsilon)$ existiert mit

$$(4.1) \qquad \sum_{i=k+1}^{k+q} A_i \subseteq S(\varepsilon,0) \qquad \text{für } k \geq k_o(\varepsilon) \text{ und alle } q \in \mathbb{N}$$

oder mit

$$(4.2) \qquad \sum_{i=k+1}^{\infty} A_i \text{ konvergiert und } \sum_{i=k+1}^{\infty} A_i \subseteq S(\varepsilon,0) \quad \text{für } k \geq k_o(\varepsilon).$$

Beweis: I. Aus (4.1) folgt die Konvergenz von $\sum_{i=r}^{\infty} A_i$ für jedes $r \geq 0$: Aus (4.1) ergibt sich zunächst $\{0\} \subseteq (\sum_{i=k+1}^{k+q} A_i)^{\varepsilon}$ für $k \geq k_0$ und alle q. Andernfalls würde für jedes $x \in T_q(k) := \sum_{i=k+1}^{k+q} A_i$ $|x| > \varepsilon$ und damit ein Widerspruch zu (4.1) folgen. Damit ist (4.1) äquivalent zu

(4.1') $\quad \left| \{0\}, \sum_{i=k+1}^{k+q} A_i \right| \leq \varepsilon \qquad$ für $k \geq k_0$ und alle q.

Für später (Satz 19) sei darauf hingewiesen, daß aus (4.2) analog

(4.2') $\quad \left| \{0\}, \sum_{i=k+1}^{\infty} A_i \right| \leq \varepsilon \qquad$ für $k \geq k_0$

folgt. Nach (2.5) und (4.1') gilt

(4.3) $\quad \left| \sum_{i=r}^{k} A_i, \sum_{i=r}^{k+q} A_i \right| = \left| \sum_{i=r}^{k} A_i + \{0\}, \sum_{i=r}^{k} A_i + \sum_{i=k+1}^{k+q} A_i \right| \leq \varepsilon$

für $k \geq \max\{r, k_0\}$ und alle q, d.h. die Partialsummen bilden eine Cauchy-Folge, und daher konvergiert $\sum_{i=r}^{\infty} A_i$ nach Satz 8.

II. Aus $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S$ folgt (4.1): Aus $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S$ ergibt sich

(4.4) $\quad |S_k, S_{k+q}| \leq \varepsilon \qquad$ für $k \geq k_0$ und alle q.

Wäre $T_q(k) \not\subseteq S(\varepsilon, 0)$, so existierte ein $x_0 \in T_q(k)$ mit $|x_0| > \varepsilon$. Im Widerspruch zu (4.4) würde dann für $a \in S_k$ mit $a \in E(S_k, x_0)$ für $k \geq k_0$ zwar $a + x_0 \in S_{k+q}$ aber nicht $a + x_0 \in S_k^{\varepsilon}$ gelten.

III. (4.1) und (4.2) sind äquivalent: Aus (4.1) folgt nach I. die Konvergenz von $\sum_{i=k}^{\infty} A_i$ für jedes $k \geq 0$. Wegen $T_q(k) \subseteq S(\varepsilon, 0)$ für $k \geq k_0$ und alle q ergibt sich aus Satz 4 $\lim_{q \to \infty} T_q(k) \subseteq S(\varepsilon, 0)$ für $k \geq k_0$. Gilt (4.2), so konvergiert $\sum_{i=k+1}^{\infty} A_i$ für $k \geq k_0$ nach Voraussetzung. Aus Satz 3 folgt $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{k} A_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} A_i$ und daraus (4.1).

Satz 10: Aus der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ folgt

a) $\lim_{i \to \infty} A_i = \{0\}$,

b) $\lim_{i \to \infty} iA_i = \{0\}$ für eine fallende Folge $(A_i)$,

c) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ oder $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$.

Beweis: Zu a: Die Behauptung ergibt sich für q = 1 sofort aus (4.1').

Zu b: Zunächst ergibt sich aus Satz 6 und a) die Gleichung $\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$, so daß $\{0\} \subseteq (iA_i)^{\varepsilon}$ immer erfüllt ist. Aus der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ folgt nach (4.1)

$$(4.5) \qquad \sum_{i=k+1}^{k+q} A_i \subseteq S(\tfrac{\varepsilon}{2},0) \qquad \text{für } k \geq k_0(\tfrac{\varepsilon}{2}) \text{ und alle } q.$$

Für $r = k + q$ ergibt sich aus (4.5), (1.5) und der Monotonie

$$qA_{k+q} = (r-k)A_r \subseteq \sum_{i=k+1}^{k+q} A_i \subseteq S(\tfrac{\varepsilon}{2},0) \text{ für } k \geq k_0(\tfrac{\varepsilon}{2}) \text{ und alle } q,$$

und nach (1.3') sowie (1.1) erhält man $(r-k)[A_r] \subseteq S(\frac{\varepsilon}{2},0)$. Für $q \geq k$ folgt $k \leq \frac{r}{2}$ und damit $(r-k) \geq \frac{r}{2}$, so daß $S(\frac{\varepsilon}{2},0) \supseteq \frac{r}{2}[A_r]$, das heißt $S(\varepsilon,0) \supseteq r[A_r] \supseteq rA_r$, für $r \geq 2k_0$ gilt.

Zu c: Wäre $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ und $a \neq 0$, so würde sich für $0 < \varepsilon < |a|$ sofort $A_i \not\subseteq S(\varepsilon,0)$ und daher $\lim_{i\to\infty} A_i \neq \{0\}$ im Widerspruch zu Teil a) ergeben.

Satz 11: Die Partialsummen einer konvergenten M-Reihe sind notwendig gleichmäßig beschränkt. Gilt $0 \in A_i$ für alle i, so ist diese Bedingung auch hinreichend für die Konvergenz.

Dieser Satz folgt sofort aus Satz 5.

Satz 12: Aus $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$, $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = B$ folgt $\sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i) = A + B$.

Beweis: Nach (1.2) erhält man $\sum_{i=1}^{k} A_i + \sum_{i=1}^{k} B_i = \sum_{i=1}^{k} (A_i + B_i)$ und damit nach Satz 3 sofort $\sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i) = A + B$.

Satz 13: Aus $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = S$ folgt:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} [A_i] = [S]$,

b) $S \in \mathfrak{K}$ wenn alle $A_i$ konvexe Körper sind.

Beweis: Zu a: Aus (1.2) und (1.3) ergibt sich $\sum_{i=1}^{k} [A_i] = [S_k]$ und nach Satz 7 die Behauptung.

Zu b: Nach (1.2) gilt $S_k \in \mathfrak{K}$ und nach Satz 8 ist $S \in \mathfrak{K}$.

Satz 14 (Verdichtungssatz): Die Folge $(A_i)$ sei fallend; dann konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i A_{2^i}$ konvergiert.

Beweis: Konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, so gilt nach Satz 6 und Satz 10a sofort $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$. Für $S_k := \sum_{i=1}^{k} A_i$, $T_k := \sum_{i=0}^{k} 2^i A_{2^i}$ erhält man

dann wegen $A_{i+1} \subseteq A_i$ nach (1.5) für $i \geq 2^k$

$$\tfrac{1}{2}A_1 + S_i \supseteq \tfrac{1}{2}A_1 + S_{2^k} = \tfrac{1}{2}A_1 + A_1 + A_2 + (A_3+A_4) + \ldots$$
$$+ (A_{2^{k-1}+1}+\ldots+A_{2^k})$$
$$\supseteq \tfrac{1}{2}A_1 + A_2 + 2A_4 + \ldots + 2^{k-1}A_{2^k} = \tfrac{1}{2}T_k.$$

Weil $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ konvergiert, sind die $S_k$ und damit auch die $T_k$ gleichmäßig beschränkt. Nach Satz 11 konvergiert dann wegen $0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ auch $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i A_{2^i}$.

Konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i A_{2^i}$, so gilt $\lim_{i\to\infty}(2^i A_{2^i}) = \{0\}$ nach Satz 10a, und damit $2^i A_{2^i} \subseteq S(\varepsilon,0)$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$. Hieraus folgt wegen $|a| \leq 2^i|a|$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$ zusammen mit der Monotonie

$$A_i \subseteq A_{2^i} \subseteq S(\varepsilon,0) \qquad \text{für } i \geq i_0(\varepsilon),$$

und wie beim Beweis von (4.1') ergibt sich hieraus auch $\{0\} \subset A_i^{\varepsilon}$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$, d.h. $\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$ (Satz 6!). Für $i \leq 2^k$ gilt außerdem wegen $A_{i+1} \subseteq A_i$ nach Hilfssatz 2 und (1.3)

$$S_i \subseteq A_1 + (A_2+A_3) + \ldots + (A_{2^k}+\ldots+A_{2^{k+1}-1})$$
$$\subseteq [A_1] + ([A_2]+[A_3]) + \ldots + ([A_{2^k}]+\ldots+[A_{2^{k+1}-1}])$$
$$\subseteq [A_1] + 2[A_2] + \ldots + 2^k[A_{2^k}] = [T_k].$$

Hiernach ergibt sich aus Satz 11 die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. Hinreichende Konvergenzkriterien.

Satz 15: Es sei $K \in \mathcal{K}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ für alle $i$; dann gilt $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i K) = \lambda K$.

Beweis: Weil $K$ beschränkt ist, existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|x| \leq c$ für jedes $x \in K$, und wegen $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda$ gilt

$$|\lambda - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i| \leq \frac{\varepsilon}{c} \qquad \text{für } k \geq k_0(\tfrac{\varepsilon}{c}). \tag{5.1}$$

Aus $K \in \mathcal{K}$ folgt nach Hilfssatz 2 sofort $S_k = (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)K$. Es sei $y \in \lambda K$; dann gilt $y = \lambda x$ mit $x \in K$. Für den Punkt $z = (\lambda_1+\ldots+\lambda_k)x \in S_k$

ergibt sich dann $|y-z| \leq \varepsilon$, d.h. $\lambda K \subseteq S_k^{\varepsilon}$ für $k \geq k_0$. Es sei $x_k \in S_k$; dann gilt $x_k = (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)x$ mit $x \in K$. Nach (5.1) folgt $|x_k - \lambda x| \leq \varepsilon$ und damit $S_k \subseteq (\lambda K)^{\varepsilon}$ für $k \geq k_0(\frac{\varepsilon}{c})$.

An dem folgenden Beispiel zeigt sich, daß Satz 15 für $K \notin \mathfrak{K}$ nicht zu gelten braucht. Ist e ein beliebiger Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ und $K' = \{0,e\}$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i K') = M := \{x : x = (\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\lambda_i)e \ , \alpha_i=0 \text{ oder } \alpha_i=1\}.$$

Es sei zunächst $y_k \in S_k$ vorgegeben, d.h. $y_k = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i x_i)$ mit $x_i \in K'$. Wählt man

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{für } x_i = 0,\ i \leq k, \\ 1 & \text{für } x_i = e,\ i \leq k \text{ und für } i > k, \end{cases}$$

so folgt $y = (\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\lambda_i)e \in M$ und $|y-y_k| = \sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i \leq \varepsilon$ ; das heißt $S_k \subseteq M^{\varepsilon}$ für $k \geq k_0(\varepsilon)$. Nun sei $y = (\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\lambda_i)e \in M$ ($\alpha_i=0$ oder $\alpha_i=1$), und man wähle

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_i = 0,\ i \leq k, \\ e & \text{für } \alpha_i = 1,\ i \leq k; \end{cases}$$

dann ist $y_k = \sum_{i=1}^{k} x_i\lambda_i \in S_k$, und es folgt $|y-y_k| = \sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i\lambda_i \leq \varepsilon$ , das heißt $M \subseteq S_k^{\varepsilon}$ für $k \geq k_0(\varepsilon)$, w.z.b.w.

Sind also mehr als eines der $\lambda_i$ ungleich Null, so gilt $M \neq \lambda K' = \{0,\lambda e\}$.

Satz 16 (Vergleichskriterium): Konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty}A_i$ und gilt $B_i \subseteq A_i$ für alle i, so konvergiert auch $\sum_{i=1}^{\infty}B_i$.

Beweis: Wegen $B_i \subseteq A_i$ für alle i ergibt sich nach Satz 9

$$(5.2) \qquad B_{k+1} + \ldots + B_{k+q} \subseteq A_{k+1} + \ldots + A_{k+q} \subseteq S(\varepsilon,0)$$

für $k \geq k_0(\varepsilon)$ und alle $q \in \mathbb{N}$ und damit die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty}B_i$.

Satz 17 (Wurzelkriterium): Gibt es ein $q \in [0,1[$ mit $A_i \subseteq q^i A$ für alle i, so konvergiert $\sum_{i=1} A_i$.

Beweis: Nach Satz 15 konvergiert $\sum_{0}^{\infty} q^i[A]$, und wegen $A_i \subseteq q^i[A]$

konvergiert nach Satz 16 auch $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

Gilt jedoch $A_i \supseteq q^i A$ für alle i und ein $q \geq 1$, so folgt für $A \neq \{0\}$ sofort $\lim_{i \to \infty} A_i \neq \{0\}$. Es gibt dann nämlich ein $a \in A$ mit $|a| > 0$, und wegen $q^i a \in q^i A \subseteq A_i$ folgt $A_i \not\subseteq S(\varepsilon, 0)$ für $\varepsilon < |a|$, so daß $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ nach Satz 10a nicht konvergieren kann.

Satz 18 (Quotientenkriterium): Gibt es ein $q \in [0,1[$ mit $A_{i+1} \subseteq q A_i$ für alle i, so konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich wegen $A_i \subseteq q^{i-1} A_1 = q^i \frac{A_1}{q}$ sofort aus Satz 17.

Gilt hingegen $A_{i+1} \supseteq q A_i$ für alle i und ein $q \geq 1$, so folgt für $A_1 \neq \{0\}$ wie oben $\lim_{i \to \infty} A_i \neq \{0\}$; nach Satz 10a kann daher $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ nicht konvergieren.

## 6. Zwei Konvergenzkriterien für Mengenfunktionen.

Definition 7: Es sei I ein Intervall der reellen Zahlengeraden. Eine Funktion $F: I \to \mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}$ heiße eine Mengenfunktion.

Für Mengenfunktionen kann man die Stetigkeit und die gleichmäßige Konvergenz von Reihen, entsprechend den Definitionen der reellen Analysis, mit Hilfe der Hausdorff-Metrik einführen. Dann gilt:

Satz 19 (Kriterium von Weierstraß): Gegeben sei eine Folge von Mengenfunktionen $F_i : [a,b] \to \mathfrak{A}$ und die konvergente M-Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} B_i$. Gilt dann $F_i(\lambda) \subseteq B_i$ für alle $\lambda \in [a,b]$, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$.

Beweis: Nach Satz 9 folgt für $k \geq k_0(\varepsilon)$, $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=k+1}^{k+q} F_i(\lambda) \subseteq \sum_{i=k+1}^{k+q} B_i \subseteq S(\varepsilon, 0), \tag{6.1}$$

und damit konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(\lambda)$ für alle $\lambda \in I := [a,b]$. Aus (2.5) sowie (4.2') ergibt sich für obiges $k_0(\varepsilon)$ und alle $\lambda$

$$\left|\sum_{i=1}^{k} F_i(\lambda), \sum_{i=1}^{\infty} F_i(\lambda)\right| \leq \left|\{0\}, \sum_{i=k+1}^{\infty} F_i(\lambda)\right| < \varepsilon \qquad \text{für } k \geq k_0;$$

das heißt $\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ konvergiert gleichmäßig auf I.

Für eine Mengenfunktion $F : [a,b] \to \bar{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{M}$ hat nun A.Dinghas das Riemann-Minkowskische Integral folgendermaßen eingeführt: Es sei $\mathfrak{Z}$: $a=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k=b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ in k abgeschlossene Teilintervalle, und zu jeder solchen Zerlegung werde eine M-Summe

$$S(\mathfrak{Z}) := \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) F(\tau_i) \qquad (\lambda_{i-1} \leq \tau_i \leq \lambda_i) \tag{6.2}$$

gebildet. Man setze $m(\mathfrak{Z}) = \max_{1 \leq i \leq k} (\lambda_i - \lambda_{i-1})$. Strebt nun die Mengenfolge $S(\mathfrak{Z}_j)$ für jede Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_j)$, für die $\lim_{j \to \infty} m(\mathfrak{Z}_j) = 0$ gilt, und bei beliebiger Wahl der $\tau_i$ gegen ein und dieselbe Grenzmenge A (wegen $S(\mathfrak{Z}_j) \in \bar{\mathcal{K}}$ ist $A \in \bar{\mathcal{K}}$), so ist das Riemann-Minkowskische Integral $\int_a^b F(\lambda)d\lambda$ (im folgenden auch: $I_a^b$) definiert durch $\int_a^b F(\lambda)d\lambda = A$. Näheres findet man bei Dinghas [1]; [2], S.81 ff. Danach ist die Existenz von $I_a^b$ gesichert, wenn F auf I stetig ist. Für $a<c<b$ gilt dann

$$I_a^b = I_a^c + I_c^b . \tag{6.3}$$

Definition 8: Die Mengenfunktion $F : I \to \mathfrak{M}$ heiße fallend auf I, wenn für $\lambda < \lambda'$ stets $F(\lambda) \supseteq F(\lambda')$ gilt.

Es sei $\mathfrak{Z}^k$ : $a=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k=b$ eine Zerlegung von I und $F : I \to \bar{\mathcal{K}}$ fallend und stetig auf I. Ist dann die Zerlegung $\mathfrak{Z}^l$ : $a=\sigma_0<\sigma_1<\ldots<\sigma_l=b$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}^k$ und gilt etwa $\sigma_{t_\lambda} = \lambda_\lambda$, so ergibt sich nach Hilfssatz 2

$$\begin{aligned}\bar{S}(\mathfrak{Z}^l) &:= \sum_{i=1}^{l} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) F(\sigma_{i-1}) \\ &\subseteq \sum_{i=1}^{t_1} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) F(\lambda_0) + \ldots + \sum_{i=t_{k-1}+1}^{t_k} (\sigma_i - \sigma_{i-1}) F(\lambda_{k-1}) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_0) F(\lambda_0) + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1}) F(\lambda_{k-1}) = \bar{S}(\mathfrak{Z}^k).\end{aligned}$$

Weil F nach Voraussetzung auf $[a,b]$ stetig ist, existiert $I_a^b$, und es gilt nach Satz 4 für $\lim_{\iota \to \alpha} m(\mathfrak{z}^1) = 0$

$$\lim_{\iota \to \alpha} \bar{S}(\mathfrak{z}^1) = \int_a^b F(\lambda)d\lambda \subseteq \bar{S}(\mathfrak{z}^k).$$

Analog schließt man

$$\underline{S}(\mathfrak{z}^k) := \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) F(\lambda_i) \subseteq \int_a^b F(\lambda)d\lambda$$

und damit

$$(6.4) \qquad \underline{S}(\mathfrak{z}^k) \subseteq \int_a^b F(\lambda)d\lambda \subseteq \bar{S}(\mathfrak{z}^k).$$

Satz 20 (Cauchysches Integralkriterium): Ist die Mengenfunktion $F : [1,+\infty[ \longrightarrow \bar{R}$ stetig und fallend auf $[1,+\infty[$, und gilt $F(i) = K_i$ für $i \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} K_i$ genau dann, wenn für $k \in \mathbb{N}$ die Grenzmenge $\lim_{k \to \infty} \int_1^k F(\lambda)d\lambda$ existiert.

Beweis: Für die Zerlegung $\mathfrak{z}^k : 1 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_i = i < \ldots < \lambda_k = k$ $(i \in \mathbb{N})$ von $[1,k]$ erhält man nach (6.4)

$$(6.5) \qquad K_2 + \ldots + K_k \subseteq \int_1^k F(\lambda)d\lambda \subseteq K_1 + \ldots + K_{k-1}.$$

Die Existenz aller in diesem Beweis auftretenden Integrale ist gesichert, weil F auf $I' := [1,+\infty[$ stetig ist. Gilt nun $\sum_{i=1}^{\infty} K_i = K$, so ergibt sich aus (6.5)

$$I_1^k \subseteq \sum_{i=1}^{k-1} K_i \subseteq K^{\varepsilon} \qquad \text{für } k > k_0(\varepsilon);$$

das heißt die $I_1^k$ sind gleichmäßig beschränkt.

Durch $\mathfrak{z}^1 : a = \sigma_0 < \ldots < \sigma_i = a + \frac{i(b-a)}{l} < \ldots < \sigma_l = b$ erhält man für $1 \leq a < b < +\infty$ eine Zerlegung von $[a,b]$ in $l$ Teilintervalle. Konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} K_i$, so folgt nach Satz 10a und Satz 6 sofort $\lim_{i \to \infty} K_i = \{0\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ und damit $0 \in S(\mathfrak{z}^1)$, wobei

$$S(\mathfrak{z}^1) = \frac{1}{l} F(\tau_1) + \ldots + \frac{1}{l} F(\tau_l)$$

ist mit $\tau_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$. Für $l \geq l_0(\varepsilon)$ gilt nun $S(\mathfrak{z}^1) \subseteq (I_a^b)^{\varepsilon}$ und

damit $0 \in (I_a^b)^\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, also auch $0 \in I_a^b$. Aus (6.3) ergibt sich $I_1^b \supseteq I_1^a + \{0\} = I_1^a$, so daß nach Satz 5 die Existenz von $I_1^\infty := \lim_{k\to\infty} I_1^k$ gesichert ist.

Wenn $I_1^\infty$ existiert, so gilt $I_1^\infty = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^{i+1}$ wegen (6.3), und nach Satz 9 ist $\sum_{i=k+1}^{k+q} I_i^{i+1} = I_{k+1}^{k+q} \subseteq S(\varepsilon,0)$ für $k \geq k_o(\varepsilon)$ und alle $q \in \mathbb{N}$. Nach (6.4) folgt hieraus

$$K_{k+1} + \ldots + K_{k+q} \subseteq I_k^{k+q} \subseteq S(\varepsilon,0)$$

für alle $k \geq k_o$ und alle $q$, so daß $\sum_{i=1}^{\infty} K_i$ nach Satz 9 konvergiert.

## III. Verallgemeinerte Minkowskische Reihen

7. Einiges über die Minkowskische Differenz. Bis jetzt wurden Reihen mit der Minkowskischen Addition als Verknüpfung betrachtet. Nun kann dieser Addition eine zweite Verknüpfung, die in Hadwiger [2] eingeführte Minkowskische Subtraktion, gegenübergestellt werden. Obwohl sie zur Minkowskischen Addition nicht invers ist, bestehen zwischen beiden Operationen gewisse inverse Beziehungen.

Definition 9: Die Minkowskische Differenz $M_1-M_2$ zweier nicht leerer Mengen $M_1$, $M_2$ ist die Menge aller Punkte p, die sich zu jedem Punkt $m_2 \in M_2$ als vektorielle Differenz $p = m_1-m_2$ mit einem passenden Punkt $m_1 \in M_1$ darstellen lassen. Das heißt formelmäßig:

$$M_1-M_2 = \{p : \{p\} + M_2 \subseteq M_1\} \tag{7.1}$$

oder auch

$$M_1-M_2 = \bigcap_{m_2 \in M_2} (\{-m_2\} + M_1). \tag{7.2}$$

Hierbei kann auch $M_1-M_2 = \emptyset$ gelten. Ist $A^*$ die zu A komplementäre, $\tilde{A}$ die aus A durch Spiegelung am Nullpunkt hervorgehende Menge, so gilt nach Hadwiger [3], S.143

$$A_1-A_2 = (A_1^*+\tilde{A}_2)^* \quad \text{und} \quad A_1+A_2 = (A_1^*-\tilde{A}_2)^* . \tag{7.3}$$

Außerdem sei erwähnt, daß für die innere Parallelmenge die Gleichung $A^{-\varrho} = A-S(\varrho,0)$ $(\varrho \geq 0)$ besteht.

Ferner benötige ich die folgenden Regeln, wobei alle auftretenden Minkowskischen Differenzen als nicht leer vorausgesetzt seien:

$$M_1 - M_2 \subseteq M_3 - M_4 \qquad \text{für } M_1 \subseteq M_3,\ M_2 \supseteq M_4, \tag{7.4}$$

$$M_1 + (M_2 - M_3) \subseteq (M_1 + M_2) - M_3 , \tag{7.5}$$

(7.6) $\widetilde{M}_1 - \widetilde{M}_2 = \widetilde{(M_1 - M_2)}$ ,

(7.7) $(A_1 - A_2) + A_3 \subseteq A_1 - (A_2 - A_3)$.

Beweis: Zu (7.4) und (7.5): Man vergleiche Hadwiger [3],S.143

Zu (7.6): Nach (7.1) gilt

$$\widetilde{M}_1 - \widetilde{M}_2 = \{p : \{p\} + \widetilde{M}_2 \subseteq \widetilde{M}_1\} = \{p : \{-p\} + M_2 \subseteq M_1\}$$
$$= \{-q : \{q\} + M_2 \subseteq M_1\} = \widetilde{\{q : \{q\} + M_2 \subseteq M_1\}} = \widetilde{(M_1 - M_2)}.$$

Zu (7.7): Unter Verwendung von (7.3), (7.5) und (7.6) erhält man $(A_1 - A_2) + A_3 = ((A_1 - A_2)^* - \widetilde{A_3})^* \subseteq (A_1^* + \widetilde{(A_2 - A_3)})^* = A_1 - (A_2 - A_3)$.

Satz 21: Für die Minkowskische Differenz gilt:

a) $0 \in A_1 - A_2 \iff A_2 \subseteq A_1$ ,

b) $A - A = \{0\}$,

c) $0 \in A_2 \implies A_1 - A_2 \subseteq A_1$ .

Beweis: a) ergibt sich aus (7.1), b) aus (7.1) weil A beschränkt ist und daher $\{p\} + A \subseteq A \iff p = 0$ gilt und c) folgt aus (7.2).

Satz 22: Für die Minkowskische Differenz gilt:

a) $A_1 - A_2 \in \mathfrak{A} \vee A_1 - A_2 = \emptyset$,

b) $A_1 \in \bar{\mathfrak{K}} \implies A_1 - A_2 \in \bar{\mathfrak{K}} \vee A_1 - A_2 = \emptyset$.

Beweis: Weil $A_1$ kompakt ist, ist jede Menge $\{-a_2\} + A_1$ und daher nach (7.2) auch $A_1 - A_2$ kompakt. Für $A_1 \in \bar{\mathfrak{K}}$ folgt sofort $\{-a_2\} + A_1 \in \bar{\mathfrak{K}}$ und nach (7.2) wieder $A_1 - A_2 = \emptyset$ oder $A_1 - A_2 \in \bar{\mathfrak{K}}$.

8. Eine umfassendere Definition der M-Reihe. In die Definition der M-Reihe soll nun die Minkowskische Subtraktion mit einbezogen werden. Zu diesem Zweck ordne man jedem Glied einer Folge $(A_i)$ eine Zahl $\alpha_i$ ($\alpha_1 = +1, \alpha_i \in \{-1,+1\}$ für $i \geq 2$) zu und definiere die Partialsummen $S'_k := \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i, A_i)$ rekursiv durch

$$S'_1 = A_1 \quad , \quad S'_k = \begin{cases} S'_{k-1} + A_k & \text{für } \alpha_k = +1 \\ S'_{k-1} - A_k & \text{für } \alpha_k = -1 \end{cases} \qquad (k \geq 2)$$

Nach (1.2) und Satz 22 folgt dann $S'_k \in \mathfrak{A}$ oder $S'_k = \emptyset$. Im letzten Fall ist das Verfahren abzubrechen.

Definition 10: Die "verallgemeinerte Minkowskische Reihe" $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, A_i)$ heiße konvergent gegen S (in Zeichen: $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, A_i) = S$), wenn alle Partialsummen $S'_k$ nicht leer sind, und wenn darüber hinaus $\lim_{k\to\infty} S'_k = S$ gilt.

Offenbar stimmt $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, A_i)$ mit der M-Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ überein, wenn $\alpha_i = +1$ für alle i gilt. Darüber hinaus ist unter anderem die Konvergenzbedingung von Satz 11 nicht mehr hinreichend. Das sieht man z.B. an der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}((-1)^{i+1}, S(1,0))$. Die Folge ihrer Partialsummen ist zwar gleichmäßig beschränkt, aber nicht konvergent.

## 9. Zwei Sätze über verallgemeinerte M-Reihen.

Satz 23 (Leibnizsches Kriterium): Für eine fallende Folge $(A_i)$ gelte $\lim_{i\to\infty} A_i = \{0\}$; dann konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty}((-1)^{i+1}, A_i)$.

Beweis: Nach Satz 21a gilt

(9.1) $\qquad 0 \in A_{i+1} - A_i \qquad$ für alle i,

und aus (7.5) ergibt sich für $S'_{2k} \neq \emptyset$

(9.2) $\qquad S'_{2k+2} = (S'_{2k} + A_{2k+1}) - A_{2k+2}$

$$\supseteq S'_{2k} + (A_{2k+1} - A_{2k+2}) \supseteq S'_{2k} \quad \text{für alle k.}$$

Ich beweise nun induktiv: $0 \in S'_k$ für alle k. Nach (9.1) gilt $0 \in S'_2$. Es sei $0 \in S'_{2k}$ ; dann folgt $\lim_{i\to\infty} A_i = \{0\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ nach Satz 6 und damit auch $0 \in S'_{2k+1}$. Darüber hinaus folgt nach (9.2) ebenfalls $0 \in S_{2k+2}$ , das heißt $0 \in S'_k$ für alle k.

Aus (7.7), (9.1) und Satz 21c ergibt sich

$$S'_{2k+1} = (S'_{2k-1} - A_{2k}) + A_{2k+1} \subseteq S'_{2k-1} - (A_{2k} - A_{2k+1}) \subseteq S'_{2k-1}$$

für alle k. Daher gilt

$$A_1 \supseteq S'_{2k+1} = S'_{2k} + A_{2k+1} \supseteq S'_{2k} \qquad \text{für alle } k,$$

d.h. die Folge $(S'_{2k})$ ist gleichmäßig beschränkt und nach (9.2) steigend; sie konvergiert nach Satz 5. Hieraus ergibt sich nach Satz 3

$$S := \lim_{k\to\infty} S'_{2k} = \lim_{k\to\infty} S'_{2k} + \lim_{k\to\infty} A_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (S'_{2k}+A_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} S'_{2k+1}$$

und damit $\lim_{k\to\infty} S'_k = \sum_{i=1}^{\infty} ((-1)^{i+1}, A_i) = S$.

Satz 24: Notwendig für die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, A_i)$ ist $\lim_{i\to\infty} A_i = \{0\}$.

Beweis: Angenommen, die Folge $(A_i)$ konvergiert nicht gegen $\{0\}$; dann gibt es zu hinreichend kleinem $\varepsilon$ eine unendliche Teilfolge $(A_{i_j})$ so daß jedes der $A_{i_j}$ mindestens einen Punkt $a_j$ enthält mit $|a_j| > \varepsilon$. Aus der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, A_i)$ folgt aber $S'_k \neq \emptyset$ für alle k und

$$(9.3) \qquad |S'_k, S'_l| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } k,l \geq k_o(\varepsilon).$$

Es sei nun $i_j > k_o$ und $x_o \in S'_{i_j-1}$ ein Punkt der Stützebene $E(S'_{i_j-1}, a_j)$.

Ist $\alpha_{i_j} = +1$, das heißt $S'_{i_j} = S'_{i_j-1} + A_{i_j}$, so gilt $y = x_o + a_j \in S'_{i_j}$. Aus $|y-x'| \geq |y-x_o| = |a_j| > \varepsilon$ für alle $x' \in S'_{i_j-1}$ folgt aber $S'_{i_j} \notin (S'_{i_j-1})^{\varepsilon}$ im Widerspruch zu (9.3).

Ist $\alpha_{i_j} = -1$, das heißt $S'_{i_j} = S'_{i_j-1} - A_{i_j}$, so kann man folgendermaßen schließen: Wegen $S'_{i_j-1} \subseteq H(S'_{i_j-1}, a_j)$, $A_{i_j} \supseteq \{a_j\}$ und Formel (7.4) gilt

$$S'_{i_j} \subseteq H(S'_{i_j-1}, a_j) - \{a_j\} = \{-a_j\} + H(S'_{i_j-1}, a_j).$$

Für alle $y \in S'_{i_j}$ ist daher $|y-x_o| \geq |a_j| > \varepsilon$ im Widerspruch zu (9.3).

## IV. Limitierungsverfahren

10. Das Cesàro-Verfahren. Es sei eine Folge oder eine verallgemeinerte M-Reihe nicht konvergent, oder es sei nicht zu entscheiden, ob sie konvergiert. Man kann dann fragen, ob trotzdem, wie bei Zahlenfolgen und -reihen, unter gewissen Voraussetzungen eine geeignete Grenzmenge zugeordnet werden kann. Es zeigt sich, daß einige der bekannten Limitierungsverfahren teilweise übertragen werden können.

Beim Cesàro-Verfahren definiert man für eine Folge $(A_i)$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zunächst rekursiv

$$(10.1) \qquad \begin{aligned} S_k^0 &= A_{k+1}, \\ S_k^l &= S_0^{l-1} + \ldots + S_k^{l-1}. \end{aligned}$$

Setzt man für festes $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(10.2) \qquad C_k^l = \frac{S_k^l}{\binom{l+k}{l}},$$

so können die $C_k^l$ gegen eine Grenzmenge streben, während die Folge $(A_i)$ nicht konvergiert. Das ist z.B. für die Folge mit $A_{2k-1} = S(1,0)$, $A_{2k} = \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ der Fall. Es gilt zwar $\lim_{k\to\infty} C_k^1 = \frac{1}{2} S(1,0)$, aber $(A_i)$ konvergiert nicht. Würde stets gelten:

$$(10.3) \qquad \lim_{i\to\infty} A_i = A \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} C_k^1 = A,$$

so könnte man allgemein $\lim_{k\to\infty} C_k^1$ als Grenzmenge der Folge $(A_i)$ zuordnen. Das ist jedoch nicht einschränkungslos der Fall. Ich beweise zuerst:

Satz 25: Die Folge $(\sigma_k) = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)$ mit reellen $\alpha_i > 0$ strebe gegen $+\infty$, und die Folge $(A_i)$ konvergiere gegen $K \in \mathbb{R}$; dann gilt auch

(10.4) $$\lim_{i\to\infty} \frac{\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_i A_i}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_i} = K .$$

Beweis: Nach Hilfssatz 2 erhält man

$$A_i' := \frac{\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_i A_i}{\sigma_i} = \frac{\alpha_1}{\sigma_i} A_1 + \ldots + \frac{\alpha_i}{\sigma_i} A_i$$

und wegen der Voraussetzung $K \in \bar{K}$

(10.5) $$K = \frac{\alpha_1}{\sigma_i} K + \ldots + \frac{\alpha_i}{\sigma_i} K.$$

Aus $d_i := |A_i, K| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $i \geq i_0(\frac{\varepsilon}{2})$ folgt nach (2.5)

$$|A_i', K| \leq \frac{\alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_i d_i}{\sigma_i} \leq \frac{\alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_{i_0-1} d_{i_0-1}}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit $|A_i', K| \leq \varepsilon$ für hinreichend großes i.

Als Hilfssatz benötige ich noch:

Satz 26: Für eine Folge $(A_i)$ sind die nachstehenden Bedingungen äquivalent:

a) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $i_0(\varepsilon)$ mit $A \subseteq A_i^{\varepsilon}$ für alle $i \geq i_0$,

b) zu jedem $a \in A$ gibt es eine Folge $(a_i)$ mit $a_i \in A_i$ und $\lim_{i\to\infty} a_i = a$.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): Sei $a \in A$ fest. Wählt man der Reihe nach $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$, so findet man nach a) für jedes $i \geq i_k := i_0(\frac{1}{k})$ ein $b_i(k) \in A_i$ mit $|a - b_i(k)| \leq \frac{1}{k}$. Ohne Einschränkung kann man $i_k < i_{k+1}$ für alle k annehmen. Die Folge $(a_i)$ sei bestimmt durch

$$a_i \in A_i \text{ beliebig für } 1 \leq i < i_1,$$
$$a_i = b_i(k) \text{ für } i_k \leq i < i_{k+1} .$$

Für $i \geq i_k$ gilt dann $a_i = b_i(k')$ mit $k' \geq k$ und damit

$$|a_i - a| = |b_i(k') - a| \leq \frac{1}{k'} \leq \frac{1}{k} ,$$

das heißt $\lim_{i\to\infty} a_i = a$.

b) $\Longrightarrow$ a) : Der $\mathbb{R}^n$ werde in n-dimensionale Würfel der Kantenlänge $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$ ($\varepsilon > 0$) zerlegt. Weil A beschränkt ist, gibt es nur endlich viele Würfel $W_1,\ldots,W_r$ mit $W_k \cap A \neq \emptyset$ ($k = 1,\ldots,r$). Jedem dieser Würfel $W_k$ werde ein Repräsentant $w_k \in A \cap W_k$ zugeordnet; dann findet man zu jedem $a \in A$ ein $w_k$ mit $|a-w_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und nach b) zu jedem $w_k$ eine Folge $(a_i(k))$ mit $a_i(k) \in A_i$ und $\lim_{i\to\infty} a_i(k) = w_k$. Aus

$$|a-a_i(k)| \leq |a-w_k| + |a_i(k)-w_k| \leq \varepsilon \qquad \text{für } i \geq i_1(\tfrac{\varepsilon}{2},k)$$

ergibt sich $A \subseteq A_i^{\varepsilon}$ für $i \geq \max_{1\leq k\leq r} i_1(\frac{\varepsilon}{2},k) = i_0(\varepsilon)$.

Der folgende Satz zeigt, daß es zweckmäßig ist, das Cesàro-Verfahren nur auf Folgen von konvexen Körpern anzuwenden. Dann ist (10.3) erfüllt.

Satz 27: Aus $\lim_{i\to\infty} A_i = A$ folgt $\lim_{k\to\infty} C_k^1 = [A]$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ setze man

$$T_k = C_{k-1}^1 \quad \left( = \frac{A_1 + \ldots + A_k}{k} \right).$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$[T_k] = \frac{[A_1] + \ldots + [A_k]}{k},$$

und nach Satz 7 und Satz 25 ergibt sich daraus $\lim_{k\to\infty} [T_k] = [A]$, also $T_k \subseteq [T_k] \subseteq [A]^{\varepsilon}$ für $k \geq k_0(\varepsilon)$.

Es sei $\bar{a} \in [A]$; dann ist $\bar{a} = \lambda a + (1-\lambda)b$ mit $a,b \in A$, $\lambda \in ]0,1[$ (für $\bar{a} \in A$ kann man etwa $a = b = \bar{a}$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ setzen). Zu jedem k existiert ein $n_k \in \{1,2,\ldots,k\}$ mit $\frac{n_k - 1}{k} < \lambda \leq \frac{n_k}{k}$, und es gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \lambda$. Offenbar strebt die Folge $(n_k)$ gegen $+\infty$. Nach Satz 26 gibt es Folgen $(a_i)$ und $(b_i)$ mit $a_i, b_i \in A_i$ und $\lim_{i\to\infty} a_i = a$, $\lim_{i\to\infty} b_i = b$. Man setze

$$t_k := \frac{a_1+\ldots+a_{n_k} + b_{n_k+1}+\ldots+b_k}{k} \in T_k ;$$

für $k > \frac{1}{1-\lambda}$ ist $k \neq n_k$, und mit

$$p_k := \frac{a_1 + \ldots + a_{n_k}}{n_k} \quad ; \quad q_k := \frac{b_{n_k+1} + \ldots + b_k}{k - n_k}$$

wird

$$t_k = \frac{n_k}{k} \; p_k + \frac{k - n_k}{k} \; q_k \,. \tag{10.6}$$

Bekanntlich ist (10.3) für Zahlenfolgen richtig und somit durch koordinatenweise Anwendung auch für Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$. Aus $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ folgt daher $\lim_{k\to\infty} p_k = a$. Aus $\lim_{i\to\infty} b_i = b$, d.h. $|b_i - b| \leq \varepsilon$ für $i \geq i_0(\varepsilon)$, folgt

$$|q_k - b| \leq \frac{|b_{n_k+1} - b| + \ldots + |b_k - b|}{k - n_k} \leq \varepsilon$$

für $n_k \geq i_0(\varepsilon)$ und daher $\lim_{k\to\infty} q_k = b$. Zusammen ergibt sich aus (10.6) jetzt $\lim_{k\to\infty} t_k = \lambda a + (1-\lambda)b = \bar{a}$ und damit nach Satz 26 auch $[A] \subseteq T_k^{\varepsilon}$ für $k > k_1(\varepsilon)$.

Satz 28: Gilt $\lim_{k\to\infty} C_k^l = K \in \mathbb{K}$ für ein $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so folgt $\lim_{k\to\infty} C_k^{l+1} = K$.

Beweis: Bekanntlich ist $\sum_{i=0}^{k} \binom{l+i}{l} = \binom{l+1+k}{l+1}$. Aus (10.1) und (10.2) ergibt sich

$$C_k^{l+1} = \frac{S_k^{l+1}}{\binom{l+1+k}{l+1}} = \frac{\binom{l}{l} C_0^l + \ldots + \binom{l+k}{l} C_k^l}{\binom{l}{l} + \ldots + \binom{l+k}{l}} \,,$$

und nach Satz 25 folgt $\lim_{k\to\infty} C_k^{l+1} = K$.

Man kann jetzt erklären:

Definition 11: Eine Folge $(K_i)$ von konvexen Körpern heiße $C^l$-limitierbar gegen A für ein $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wenn $\lim_{k\to\infty} C_k^l = A$ gilt.

Satz 29: Konvergiert die steigende Folge $(A_i)$ nicht, so existiert auch $\lim_{k\to\infty} C_k^l$ nicht.

Beweis: Nach Satz 5 sind die $A_i$ nicht gleichmäßig beschränkt.

Es gibt also für jedes $\varrho \in \mathbb{N}$ ein $i_o$ mit $A_{i_o} \not\subset S(\varrho,0)$ und damit ein $x_o \in A_{i_o}$ mit $|x_o| > \varrho$ . Wegen $A_i \subseteq A_{i+1}$ gilt auch $x_o \in A_i$ für $i > i_o$. Man setze $x_i = a$ für $1 \leq i < i_o$ (wobei a ein beliebiger Punkt aus $A_1$ sei) und $x_i = x_o$ für $i_o \leq i \leq k+1$; dann gilt

$$c_k = \frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1} = \frac{i_o - 1}{k+1} a + \frac{k - i_o + 2}{k+1} x_o \in C_k^1 .$$

Wegen $|c_k| \geq \left| \frac{k - i_o + 2}{k+1} \varrho - \frac{i_o - 1}{k+1} |a| \right| = \left| \varrho - \frac{c}{k+1} \right|$ (c=const. für festes $\varrho$) wird $|c_k| \geq \varrho - 1$ für hinreichend großes k, d.h. die $C_k^1$ sind nicht gleichmäßig beschränkt, also existiert $\lim_{k \to \infty} C_k^1$ nach Satz 5 nicht.

Jede verallgemeinerte M-Reihe läßt sich auf die Folge $(S_k')$ ihrer Partialsummen zurückführen, und daher können wir für M-Reihen sagen:

Satz 28': Gilt $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, A_i) = K$ und $K \in \mathcal{K}$ ; dann folgt für

$$C_k^1 = \frac{S_1' + \ldots + S_{k+1}'}{k+1}$$

auch $\lim_{k \to \infty} C_k^1 = K$ und damit $\lim_{k \to \infty} C_k^l = K$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ .

Definition 11': Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, K_i)$ mit $K_i \in \mathcal{K}$ heiße $C^1$-summierbar gegen S für ein $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wenn die Folge ihrer Partialsummen $S_k'$ $C^1$-limitierbar gegen S ist.

Satz 29': Es gelte $0 \in A_i$ für alle i, und $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ sei nicht konvergent; dann existiert auch $\lim_{k \to \infty} C_k^1$ nicht.

Beweis: Die $S_k$ bilden wegen $0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ eine steigende Folge, so daß sich die Behauptung sofort aus Satz 29 ergibt.

11. Das Hölder-Verfahren. Beim Hölder-Verfahren definiert man für eine Folge $(A_i)$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ rekursiv

$$(11.1) \qquad H_k^0 = A_{k+1} , \qquad H_k^l = \frac{H_0^{l-1} + \ldots + H_k^{l-1}}{k+1} ,$$

und untersucht für festes 1 das Konvergenzverhalten der Folge $(H_k^1)$. Wegen $C_k^1 = H_k^1$ (beide Verfahren unterscheiden sich erst von der zweiten Stufe an) gelten Satz 28 und Satz 29 auch für das Hölder-Verfahren. Daher kann man erklären:

Definition 12: Eine Folge $(K_i)$ von konvexen Körpern heiße $H^1$-limitierbar gegen A für ein $1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, wenn $\lim_{k\to\infty} H_k^1 = A$ gilt.

Auch für verallgemeinerte M-Reihen gelten wieder die entsprechenden Sätze.

Es ist erst dann sinnvoll, zusätzlich zum Cesàro-Verfahren das Hölder-Verfahren einzuführen, wenn es Folgen gibt, die erst von der zweiten Stufe an limitierbar sind. Hierfür bietet für festes $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ die Folge $(A_i)$ mit

$$A_i = \begin{cases} \{(2k-1)a\} & \text{für } i = 2k-1, \\ \{-(2k-1)a\} & \text{für } i = 2k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

ein Beispiel.

12. Das Abel-Verfahren. Beim Abel-Verfahren untersucht man das Grenzverhalten der M-Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i A_i$ $(\varrho \in [0,1[)$ für $\varrho \to 1$ im Sinne der Hausdorff-Metrik.

Satz 30: Konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ gegen S, so konvergiert auch $\sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i A_i$ für $0 \leq \varrho < 1$, und es gilt $\lim_{\varrho\to 1} \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i A_i = S$.

Beweis: Nach (2.5) ergibt sich

$$\left| \sum_{i=k+1}^{k+q} \varrho^i A_i, \{0\} \right| \leq \varrho^{k+1} \left| A_{k+1}, \{0\} \right| + \ldots + \varrho^{k+q} \left| A_{k+q}, \{0\} \right|,$$

und aus der Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ folgt nach Satz 10a sofort

$\lim_{i\to\infty} A_i = \{0\}$. Damit erhält man

$$\Big|\sum_{i=k+1}^{k+q} \varrho^i A_i, \{0\}\Big| \leq (\varrho^{k+1}+\ldots+\varrho^{k+q})(1-\varrho)\varepsilon < \varepsilon$$

für $k \geq k_0((1-\varrho)\varepsilon)$, d.h. nach Satz 9 konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i A_i$.

Sicher ist für $S_k(\varrho) := \sum_{i=0}^{k} \varrho^i A_i$ , $S(\varrho) := \sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i A_i$ , $S_k := \sum_{i=0}^{k} A_i$ und $S := \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ die Ungleichung

$$|S,S(\varrho)| \leq |S,S_k| + |S_k,S_k(\varrho)| + |S_k(\varrho),S(\varrho)|$$

erfüllt, und es folgt sofort $|S,S_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $|S_k(\varrho),S(\varrho)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $k \geq k_1(\frac{\varepsilon}{3})$.

Wählt man nun $k \geq k_1(\frac{\varepsilon}{3})$ fest und gibt zunächst $x \in S_k$ vor, d.h. $x = x_0+\ldots+x_k$ mit $x_i \in A_i$, so ist $y = x_0+\varrho x_1+\ldots+\varrho^k x_k$ aus $S_k(\varrho)$. Es ergibt sich

$$(12.1)\quad |x-y| \leq |x_1|(1-\varrho) + |x_2|(1-\varrho^2) +\ldots+ |x_k|(1-\varrho^k).$$

Weil jedes $A_i$ beschränkt ist, existiert eine positive Zahl $m(k)$, so daß $|x_i| \leq m(k)$ für alle $x_i \in A_i$ und für $i \leq k$ gilt, d.h.

$$\begin{aligned}|x-y| &\leq m(k)(1-\varrho)(1 + 1+\varrho + 1+\varrho+\varrho^2 +\ldots+ 1+\varrho+\ldots+\varrho^{k-1})\\ &\leq m(k)(1-\varrho)(1+2+\ldots+k) = m(k)(1-\varrho)\frac{k(k+1)}{2} < \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

für $(1-\varrho) \leq \frac{2\varepsilon}{3k(k+1)m(k)}$ . Es sei nun $y \in S_k(\varrho)$ vorgegeben, d.h. es gilt $y = x_0+\varrho x_1+\ldots+\varrho^k x_k$ mit $x_i \in A_i$; dann ist der Punkt $x = x_0+x_1+\ldots+x_k$ ein Element aus $S_k$, und es ergibt sich für obige $\varrho$ $|y-x| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ (nach abermaliger Abschätzung von (12.1)). Damit folgt $|S_k,S_k(\varrho)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , also insgesamt $|S,S(\varrho)| \leq \varepsilon$ für hinreichend nahe an 1 gelegenes $\varrho$, d.h. $\lim_{\varrho\to 1} S(\varrho) = S$.

Im Anschluß an Satz 30 kann man erklären:

<u>Definition 13:</u> Die M-Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} A_i$ heiße <u>A-summierbar gegen</u> S, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \varrho^i A_i$ für jedes $\varrho \in [0,1[$ gegen eine Grenzmenge $S(\varrho)$ konvergiert und wenn $\lim_{\varrho\to 1} S(\varrho) = S$ gilt.

Das Abel-Verfahren läßt sich allgemein auf M-Reihen aus nicht leeren, kompakten Summanden anwenden, allerdings nicht auf verallgemeinerte M-Reihen. Ist z.B. $A_0 = \{0,1\}$, $\alpha_0 = 1$, $A_1 = \{0,1\}$, $\alpha_1 = -1$ und $A_i = \{0\}$, $\alpha_i = +1$ für $i \geq 2$, so gilt $\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha_i, A_i) = \{0\}$ aber $A_0 - \varphi A_1 = \emptyset$ und damit konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha_i, \varphi^i A_i)$ nicht.

## Literatur

Bonnesen, T.; Fenchel, W.: [1] Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934; Nachdruck: New York: Chelsea Publishing Company, 1948.

Dinghas, A.: [1] Zum Minkowskischen Integralbegriff abgeschlossener Mengen. Math. Z. 66, 173-188 (1956).

[2] Minkowskische Summen und Integrale, superadditive Mengenfunktionale, isoperimetrische Ungleichungen. Paris: Gauthier-Villars, 1961, Mémorial des Sciences Mathématiques, Bd.149.

Hadwiger, H.: [1] Ein Auswahlsatz für abgeschlossene Punktmengen. Portugaliae Math. 8, 13-15 (1949).

[2] Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt. Math. Z. 53, 210-218 (1950).

[3] Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1957.

Hausdorff, F.: [1] Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit & Co, 1914; Nachdruck: New York: Chelsea Publishing Company, 1949.

Minkowski, H.: [1] Gesammelte Abhandlungen. Leipzig-Berlin: Teubner, 1911, Bd.2.

## Lebenslauf

Ich wurde am 20.11.1940 in Berlin geboren. Bis 1945 lebten meine Eltern mit mir dann in Waltersdorf, Kreis Sorau, wo mein Vater die Lehrerstelle innehatte. Wie für viele, so war auch für unsere Familie das Jahr 1945 von entscheidender Bedeutung, denn im März fiel mein Vater, und wir flohen aus Waltersdorf nach Berlin, wo ich dann 1947 eingeschult wurde. Nach sechs Grundschuljahren besuchte ich dann bis zum Abitur im März 1960 den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zug der Hermann-Hesse-Schule in Berlin. Nach einem zweisemestrigen Studium an der Pädagogischen Hochschule Berlin (Wahlfach Mathematik) wechselte ich im April 1961 zur Freien Universität Berlin über, wo ich seitdem die Fächer Mathematik und Physik bis zum Diplomexamen am 19.4.67 studiert habe. Anschließend habe ich mich dann neben diesen Fächern auch mit Astronomie beschäftigt. Vom 1.4.64 bis zum 28.2.69 war ich am I. Mathematischen Institut der Freien Universität als wissenschaftliche Hilfsassistentin angestellt. Ab 1.3.69 bin ich wissenschaftliche Assistentin für das Wahlfach Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Berlin.

Herrn Professor Dr.Orsinger und Herrn Professor Dr.Dinghas danke ich für die Unterstützung und die Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit.

Druck: Dissertationsdruckstelle, 1 Berlin 33